a)

$$x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z+12=0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x-1)^2-1+(y-1)^2-1+(z-1)^2-1=-12$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=-9\prec 0$$

Donc l'ensemble des points M est l'ensemble vide

b)

$$x^2+y^2+z^2-6x+4y-2z+5=0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x-3)^2-9+(y+2)^2-4+(z-1)^2-1=-5$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=9=3^2$$

Donc l'ensemble des points M est la sphère de centre I (3, – 2, 1) et de rayon R = 3

c)

$$x^2+y^2+z^2+2x+2y+6z-8=0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x+1)^2-1+(y+1)^2-1+(z+3)^2-9=8$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x+1)^2+(y+1)^2+(z+3)^2=19=\sqrt{19}^2$$

Donc l'ensemble des points M est la sphère de centre I (–1, – 1, –3) et de rayon R = $\sqrt{19}$

Exercice n° 24

a)

$$x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z=0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x-1)^2-1+(y-1)^2-1+(z-1)^2-1=0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=3$$

D'où S est une sphère de centre I (1,1,1) et de rayon $\sqrt{3}$

On a : $d(I,P)=\dfrac{|1-1|}{\sqrt{1+1}}=0\prec\sqrt{3}$ ce qui prouve que S et P sont sécants suivant le cercle ζ de centre I et de rayon $\sqrt{3}$

b)

$$x^2+y^2+z^2-2x+4y+6z=0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x-1)^2-1+(y+2)^2-4+(z+3)^2-9=0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x-1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=14$$

D'où S est une sphère de centre I (1, – 2, – 3) et de rayon $\sqrt{14}$

On a : $d(I,P)=\dfrac{|2\times1+3\times(-2)-2\times(-3)|}{\sqrt{2^2+3^2+(-2)^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{17}}$

$$d(I,P)=\frac{2}{\sqrt{17}}\prec R=\sqrt{14}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}\text{S et P sont sécants suivant}\\ \text{le cercle de centre H et de rayon r}\end{cases}$$

• $r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{14-\dfrac{4}{17}}=\sqrt{\dfrac{234}{17}}$

• Posons $H(x_H,y_H,z_H)$

On sait que H est le projeté orthogonal de I sur le plan P

D'où $\overrightarrow{IH}$ et $\overrightarrow{N_P}\begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix}$ (vecteur normal de P) sont colinéaires

$$\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{IH}=\alpha\overrightarrow{N_P}\ \alpha\in\mathbb{R}\\ H\in P\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_H=1+2\alpha\\ y_H=-2+3\alpha\\ z_H=-3-2\alpha\\ 2x_H+3y_H-2z_H+1=0\end{cases}\quad\alpha\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow 2+4\alpha-6+9\alpha+6+4\alpha+1=0\Rightarrow\alpha=-\frac{3}{17}$$

$$\Rightarrow\boxed{H\left(\frac{11}{17},-\frac{43}{17},-\frac{45}{17}\right)}$$

c)

$$x^2+y^2+z^2-2x=0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x-1)^2-1+y^2+z^2=0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x-1)^2+y^2+z^2=1$$

D'où S est une sphère de centre I (1, 0, 0) et de rayon 1

On a : d = $d(I,P)=\dfrac{|1+0|}{\sqrt{1+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\prec 1$

$\Rightarrow$ S et P sont sécants suivant un cercle de centre H et de rayon r

• $r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{1-\dfrac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

• Posons $H(x_H,y_H,z_H)$

$\overrightarrow{IH}$ et $\overrightarrow{N_P}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ (vecteur normal de P) Sont colinéaires

Oarray.tn - Aqra Blech Oarray.tn